

Descubriendo la Geometría

Números, formas e ideas que cambiaron el mundo

Gerardo Honorato

Instituto de Ingeniería Matemática
Universidad de Valparaíso

June 24, 2026

Objetivos del Taller

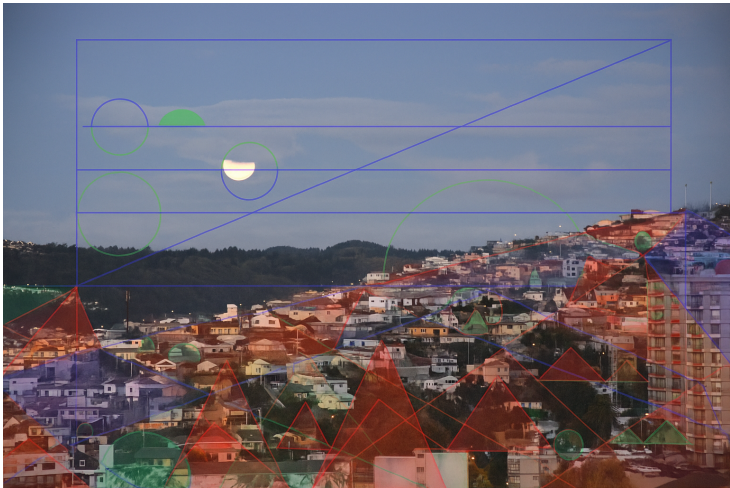
- Ubicarse en la recta numérica.
- Ángulos y sus amigos.
- Teorema de Pitágoras.
- Identificar y utilizar la ecuación de la recta en forma vectorial y cartesiana.

¿Dónde vemos geometría?



Geometría en Valparaíso

¿Dónde vemos geometría?



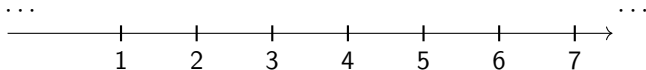
Geometría en Valparaíso

Números naturales en la recta

Los primeros números que conocimos son los “números naturales”:

1, 2, 3, 4, 5, ...

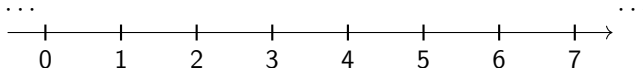
*Los números naturales nunca se acaban, porque a cada uno podemos sumarle 1.
Podemos imaginarlos sobre una recta:*



Incluimos el cero

Luego, agregamos el número 0 al inicio:

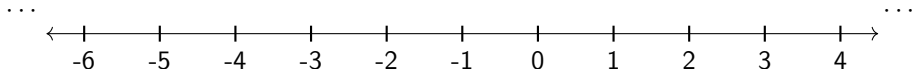
El cero representa la ausencia de cantidad. Con él iniciamos la construcción de los enteros.



Números enteros: positivos y negativos

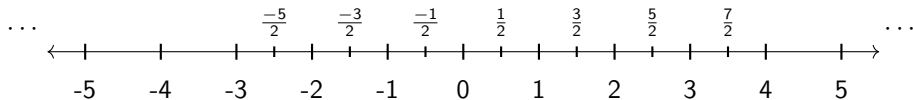
Finalmente, agregamos los números negativos:

Los negativos permiten representar deudas, temperaturas bajo cero, posiciones a la izquierda, etc.



Fracciones entre enteros

Entre cada par de números enteros hay infinitas fracciones. Por ejemplo:

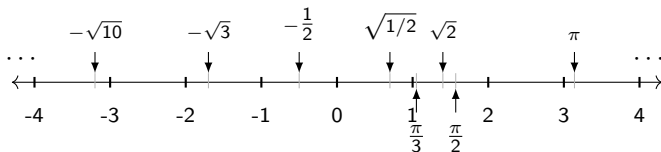


Algunos valores aproximados:

$$\frac{1}{2} = 0.5, \quad \frac{3}{2} = 1.5, \quad \frac{5}{2} = 2.5, \quad \frac{2}{3} = 0.666\ldots = 0.\bar{6} \quad \text{etc.}$$

Los números reales

- Los racionales no llenan toda la recta numérica.
- Existen infinitos números llamados irracionales, como $\sqrt{2}$ o π , que no se pueden escribir como fracción.
- Al añadir estos irracionales, obtenemos los **números reales**.



Por ejemplo, $-1\,000\,000 < \frac{1}{10}$ porque está más a la izquierda en la recta.

Valor decimal de $\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\sqrt{2} = & 1.414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,688\,724\,209\,698\,078\,569 \\ & 671\,875\,376\,948\,073\,176\,679\,737\,990\,732\,478\,462 \\ & 107\,038\,850\,387\,534\,327\,641\,572 \dots\end{aligned}$$

Este número no puede representarse como fracción exacta. Es un número irracional con infinitas cifras no periódicas.

π : Si el universo cupiera en un círculo...

Imaginemos que pudiéramos encerrar todo el universo observable dentro de un círculo gigantesco.

Ese círculo tendría una circunferencia enorme y un diámetro enorme.

$$\text{circunferencia} = C \quad \text{diámetro} = d$$

π : Si el universo cupiera en un círculo...

Imaginemos que pudiéramos encerrar todo el universo observable dentro de un círculo gigantesco.

Ese círculo tendría una circunferencia enorme y un diámetro enorme.

$$\text{circunferencia} = C \quad \text{diámetro} = d$$

Pero, sin importar qué tan grande sea el círculo, siempre ocurre lo mismo:

$$\frac{C}{d} = \pi.$$

π : Si el universo cupiera en un círculo...

Imaginemos que pudiéramos encerrar todo el universo observable dentro de un círculo gigantesco.

Ese círculo tendría una circunferencia enorme y un diámetro enorme.

$$\text{circunferencia} = C \quad \text{diámetro} = d$$

Pero, sin importar qué tan grande sea el círculo, siempre ocurre lo mismo:

$$\frac{C}{d} = \pi.$$

π : Si el universo cupiera en un círculo...



π : Si el universo cupiera en un círculo...

Lo sorprendente

Aunque el círculo fuera del tamaño del universo, al dividir su circunferencia por su diámetro aparecería el mismo número:

$$\pi = 3.1415926535 \dots$$

π no depende del tamaño del círculo: aparece en todos, desde una moneda hasta una escala cósmica.

π : Si el universo cupiera en un círculo...



¿Qué tan grande es conocer tantas cifras de π ?

Hoy se conocen, de manera computacionalmente verificada, aproximadamente

314 000 000 000 000

cifras decimales de π . Es decir, 314 millones de millones.

¿Qué tan grande es conocer tantas cifras de π ?

Hoy se conocen, de manera computacionalmente verificada, aproximadamente

314 000 000 000 000

cifras decimales de π . Es decir, 314 millones de millones.

Eso es tan grande que, si una persona leyera un dígito por segundo, sin detenerse nunca,

314 000 000 000 000 segundos

equivalen aproximadamente a

10.000.000 años.

Idea sorprendente

Leer todas los dígitos conocidos de π tomaría cerca de diez millones de años.

Y aun así, π no termina: sus cifras decimales siguen infinitamente y no forman un período.

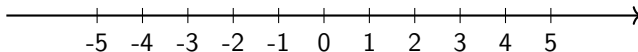
Applet interactivo: recta numérica zoom infinito



Math Is Fun – Zoomable Number Line

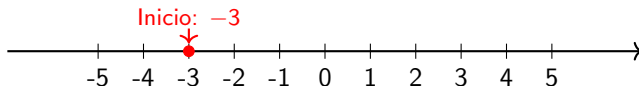
- Haz click para acercar en esa región, o Shift-click para alejar.
- Usa flechas o desplazamiento para moverte a la izquierda o derecha.
- Observa cómo aparecen nuevos subintervalos infinitos a medida que acercas.

Sumas en la Recta Numérica



Explicación paso a paso

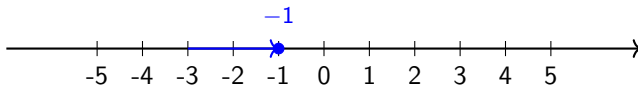
Sumas en la Recta Numérica



Explicación paso a paso

- $-3 + 2$: Comienzas en -3 , te mueves 2 unidades a la derecha $\rightarrow$ llegas a -1 .

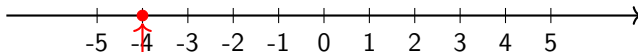
Sumas en la Recta Numérica



Explicación paso a paso

- $-3 + 2$: Comienzas en -3 , te mueves 2 unidades a la derecha $\rightarrow$ llegas a -1 .

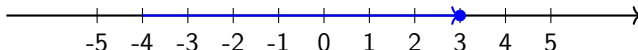
Sumas en la Recta Numérica



Explicación paso a paso

- $-4 + 7$: Comienzas en -4 , te mueves 7 unidades a la derecha $\rightarrow$ llegas a 3.

Sumas en la Recta Numérica

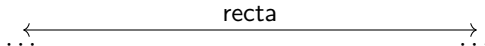


Explicación paso a paso

- $-4 + 7$: Comienzas en -4 , te mueves 7 unidades a la derecha $\rightarrow$ llegas a 3.

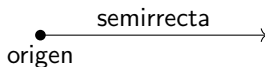
En geometría: ¿Qué es una recta?

Una **recta** es una línea que se extiende sin fin en ambas direcciones. No tiene comienzo ni fin.



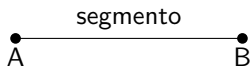
¿Qué es una semirrecta?

Una **semirrecta** tiene un origen, pero se extiende indefinidamente en una sola dirección.



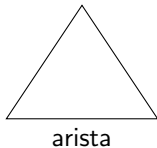
¿Qué es un segmento?

Un **segmento** tiene principio y fin. Es una parte de recta entre dos puntos.



¿Qué es una arista?

Una **arista** es el lado de una figura geométrica, como un polígono o un sólido.



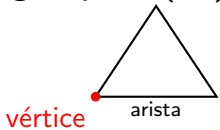
¿Lado, arista o cara?

Diferencias entre conceptos geométricos

- **Arista o Lado (Edge):** segmento que une dos vértices en una figura plana (2D), como un triángulo o cuadrado. También es borde donde se unen dos caras de un sólido (3D), como un cubo o pirámide.
- **Cara:** superficie plana que forma parte de un sólido tridimensional.

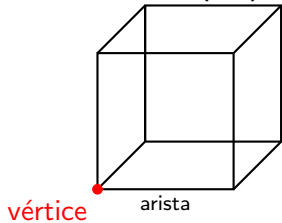
Término	de Dimensión	Ejemplo
Arista	1D	Borde entre caras de un cubo
Cara	2D	Superficie cuadrada del cubo

Figura plana (2D)



Ejemplo: Triángulo (3 aristas o lados)

Figura sólida (3D)



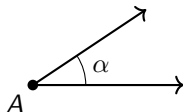
Ejemplo: Cubo (12 aristas)

¡Atención!

En figuras planas usamos **lados**, en sólidos usamos **aristas** y **caras**. En inglés la palabra EDGE es para lado y arista. Ejemplo: un cubo tiene 12 aristas y 6 caras.

¿Qué es un ángulo?

Un **ángulo** α es la abertura entre dos semirrectas que parten del mismo punto (llamado vértice A).



Explora tipos de ángulos con GeoGebra



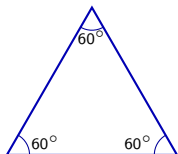
<https://www.geogebra.org/m/Ny2VKFpu>

- Clasifica el ángulo que aparece moviendo el punto.
- ¿Es agudo ($< 90^\circ$), recto ($= 90^\circ$), obtuso ($> 90^\circ$), llano ($= 180^\circ$) o oblicuo (o reflejo) ($> 180^\circ$)?
- Practica con ejemplos y verifica tus respuestas.

Algunos triángulos conocidos

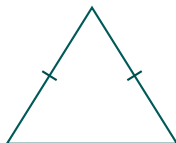
Triángulo equilátero

- Todos los lados son iguales.
- Todos los ángulos miden 60° .



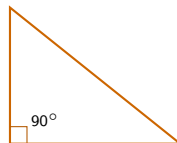
Triángulo isósceles

- Tiene dos lados iguales.
- Los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales.



Triángulo rectángulo

- Tiene un ángulo recto (90°).
- Los otros dos ángulos suman 90° .



Resumen: Fórmulas clave de triángulos

Tipo de triángulo	Área	Idea clave
Cualquiera	$A = \frac{b \cdot h}{2}$	La altura siempre es perpendicular a la base.
Equilátero	$A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$	$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$, donde a es el lado.
Isósceles	$A = \frac{b \cdot h}{2}$	La altura a la base divide la base en dos partes iguales.
Rectángulo	$A = \frac{\text{cateto}_1 \cdot \text{cateto}_2}{2}$	Los catetos son perpendiculares.

Otros conceptos importantes:

- En un triángulo rectángulo:

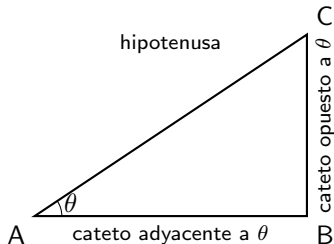
$$\text{cateto}_1^2 + \text{cateto}_2^2 = \text{hipotenusa}^2.$$

- La suma de los ángulos interiores de todo triángulo es 180° .
- En un isósceles, la altura a la base permite formar dos triángulos rectángulos.

¿Qué es el coseno en un triángulo rectángulo?

El coseno de un ángulo agudo θ en un triángulo rectángulo se define como:

$$\cos(\theta) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$



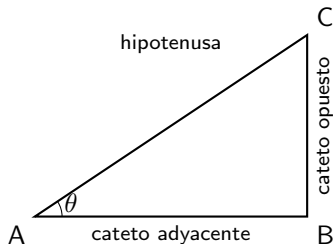
Ejemplo: Si el cateto adyacente mide 3 y la hipotenusa 5, entonces:

$$\cos(\theta) = \frac{3}{5} = 0,6$$

¿Qué es el seno en un triángulo rectángulo?

El seno de un ángulo agudo θ se define como:

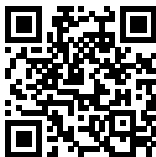
$$\text{sen}(\theta) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$



Ejemplo: Si el cateto opuesto mide 5 y la hipotenusa 13, entonces:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{5}{13} \approx 0,3846$$

Seno y Coseno en el Círculo Goniométrico



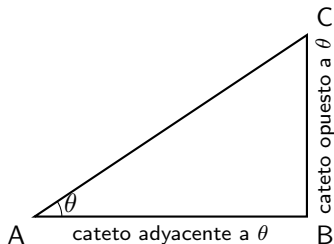
<https://www.geogebra.org/m/abEetC3E>

- Explora cómo:
 - $\cos(\theta)$ = coordenada horizontal (eje x)
 - $\sin(\theta)$ = coordenada vertical (eje y)
- Mueve el punto y observa el valor de seno y coseno.
- ¿Qué pasa cuando el ángulo pasa de 90° , 180° , 270° ?

¿Qué es la tangente en un triángulo rectángulo?

La tangente de un ángulo agudo θ en un triángulo rectángulo se define como:

$$\text{tang}(\theta) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)}$$



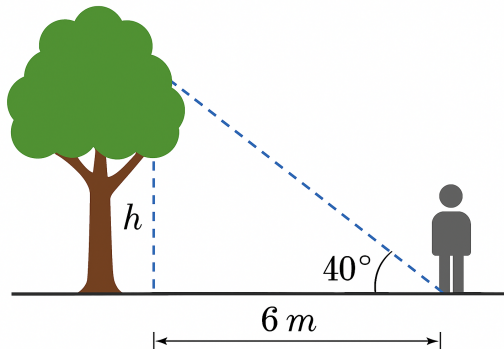
Ejemplo: Si el cateto opuesto mide 4 y el adyacente 3:

$$\tan(\theta) = \frac{4}{3} \approx 1,33$$

Trigonometría en la Vida Real

Asunto:

Un árbol proyecta una sombra de 6 metros cuando el ángulo de elevación del sol es de 40° . ¿Cuál es su altura?



Solución: $\tan(40^\circ)$

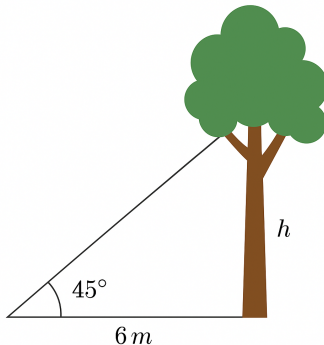
$$\tan(40^\circ) = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 6 \cdot \tan(40^\circ) \approx 5,03 \text{ m}$$

$\tan(40^\circ)$ **no es facil de calcular.**

Trigonometría en la Vida Real

Problema:

Un árbol proyecta una sombra de 6 metros cuando el ángulo de elevación del sol es de 45° . ¿Cuál es su altura?



Sabemos que:

$$\tan(45^\circ) = \frac{\text{altura}}{\text{sombra}} = \frac{h}{6}$$

Como $\tan(45^\circ) = 1$, entonces:

$$h = 6 \cdot 1 = 6 \text{ metros}$$

Respuesta: La altura del árbol es de **6 metros**. IR AL APPLET DEL CÍRCULO GONIOMÉTRICO.

¿Qué pasa si cambiamos la dirección?

La geometría permite entender cómo una decisión angular puede cambiar completamente un destino.

Situación

Un piloto despegue desde Santiago y debe recorrer **5800 km**. Inicialmente sigue una ruta, pero luego cambia su rumbo en **90°**.

La pregunta es:

¿Qué tan lejos queda el nuevo destino del destino original?

¿Qué pasa si cambiamos la dirección?

La geometría permite entender cómo una decisión angular puede cambiar completamente un destino.

Situación

Un piloto despegue desde Santiago y debe recorrer **5800 km**. Inicialmente sigue una ruta, pero luego cambia su rumbo en **90°**.

La pregunta es:

¿Qué tan lejos queda el nuevo destino del destino original?

Idea central

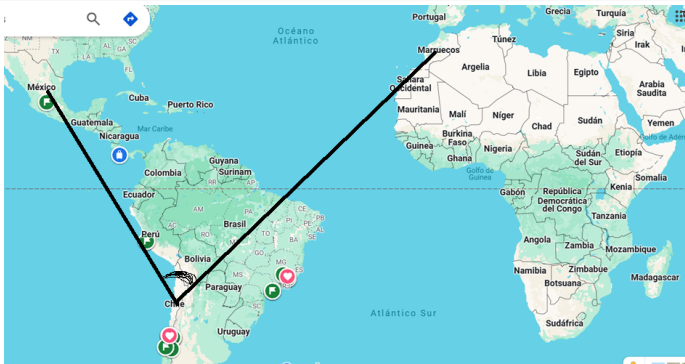
Cuando la distancia recorrida es muy grande, un cambio de ángulo puede producir una separación enorme.

El modelo geométrico

Modelo

Tenemos dos posibles trayectorias de longitud 5800 km que salen desde el mismo punto.

El ángulo entre ambas trayectorias es de 90° .

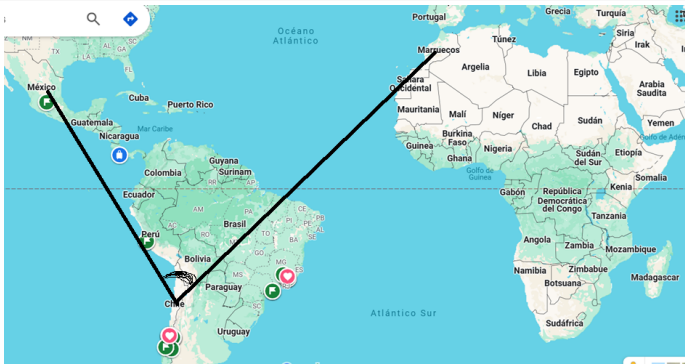


El modelo geométrico

Modelo

Tenemos dos posibles trayectorias de longitud 5800 km que salen desde el mismo punto.

El ángulo entre ambas trayectorias es de 90° .



¿Qué tan separados quedan los destinos?

Como el triángulo es rectángulo, usamos el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = 5800^2 + 5800^2$$

¿Qué tan separados quedan los destinos?

Como el triángulo es rectángulo, usamos el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = 5800^2 + 5800^2$$

$$c^2 = 2 \cdot 5800^2$$

¿Qué tan separados quedan los destinos?

Como el triángulo es rectángulo, usamos el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = 5800^2 + 5800^2$$

$$c^2 = 2 \cdot 5800^2$$

$$c = 5800\sqrt{2}$$

¿Qué tan separados quedan los destinos?

Como el triángulo es rectángulo, usamos el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = 5800^2 + 5800^2$$

$$c^2 = 2 \cdot 5800^2$$

$$c = 5800\sqrt{2}$$

Usando la aproximación

$$\sqrt{2} \approx 1,4,$$

obtenemos

$$c \approx 5800 \cdot 1,4 = 8120.$$

¿Qué tan separados quedan los destinos?

Como el triángulo es rectángulo, usamos el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = 5800^2 + 5800^2$$

$$c^2 = 2 \cdot 5800^2$$

$$c = 5800\sqrt{2}$$

Usando la aproximación

$$\sqrt{2} \approx 1,4,$$

obtenemos

$$c \approx 5800 \cdot 1,4 = 8120.$$

Resultado

$$c \approx 8120 \text{ km}$$

Conclusión

Idea geométrica

No cambió la distancia recorrida: cambió el **ángulo**.

Conclusión

Idea geométrica

No cambió la distancia recorrida: cambió el **ángulo**.

El avión recorre 5800 km en ambos casos, pero al cambiar el rumbo en 90° , los destinos quedan separados por aproximadamente

8120 km.

Conclusión

Idea geométrica

No cambió la distancia recorrida: cambió el **ángulo**.

El avión recorre 5800 km en ambos casos, pero al cambiar el rumbo en 90° , los destinos quedan separados por aproximadamente

8120 km.

Mensaje

En trayectos largos, una diferencia angular puede mover el destino a otro continente.

Cuerpos geométricos

Cuerpo	Fórmula de volumen	Ejemplo
Cubo	$V = a^3$	Dado
Prisma rectangular	$V = l \cdot a \cdot h$	Caja, piscina
Cilindro	$V = \pi r^2 h$	Lata, vaso
Cono	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$	Cono de helado
Pirámide	$V = \frac{A_b h}{3}$	Pirámide
Esfera	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$	Pelota

Cuerpos geométricos

Cuerpo	Fórmula de volumen	Ejemplo
Cubo	$V = a^3$	Dado
Prisma rectangular	$V = l \cdot a \cdot h$	Caja, piscina
Cilindro	$V = \pi r^2 h$	Lata, vaso
Cono	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$	Cono de helado
Pirámide	$V = \frac{A_b h}{3}$	Pirámide
Esfera	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$	Pelota

Idea clave

Los cuerpos con punta, como conos y pirámides, tienen volumen dividido por 3.

Volumen y unidades: una piscina

Una piscina mide 10 m de largo, 6 m de ancho y 1,6 m de profundidad.

Pregunta

¿Cuál es el volumen de agua que puede contener la piscina, expresado en litros?

Volumen y unidades: una piscina

Una piscina mide 10 m de largo, 6 m de ancho y 1,6 m de profundidad.

Pregunta

¿Cuál es el volumen de agua que puede contener la piscina, expresado en litros?

El volumen de un prisma rectangular es:

$$V = \text{largo} \cdot \text{ancho} \cdot \text{profundidad}$$

$$V = 10 \cdot 6 \cdot 1,6 = 96 \text{ m}^3$$

Volumen y unidades: una piscina

Una piscina mide 10 m de largo, 6 m de ancho y 1,6 m de profundidad.

Pregunta

¿Cuál es el volumen de agua que puede contener la piscina, expresado en litros?

El volumen de un prisma rectangular es:

$$V = \text{largo} \cdot \text{ancho} \cdot \text{profundidad}$$

$$V = 10 \cdot 6 \cdot 1,6 = 96 \text{ m}^3$$

Como

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ litros},$$

entonces

$$96 \text{ m}^3 = 96000 \text{ litros.}$$

96000 litros

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo (solo estos triángulos rectangulos), el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

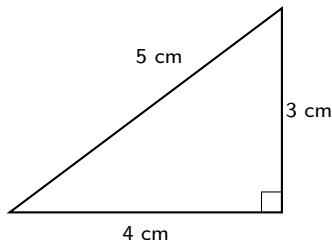
- a, b : catetos
- c : hipotenusa (está al frente del ángulo recto, de 90 grados)

Ejemplo con números pitagóricos

Problema: Un triángulo rectángulo tiene catetos de 3 cm y 4 cm. ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa?

Aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = \sqrt{25} = 5$$



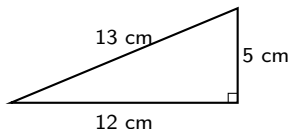
Conclusión: La hipotenusa mide **5 cm**. Esta es una terna pitagórica: (3, 4, 5).

Otra terna pitagórica: (5, 12, 13)

Problema: Un triángulo rectángulo tiene catetos de 5 cm y 12 cm. ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa?

Aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{169} = 13$$



Conclusión: La hipotenusa mide **13 cm**. Otra terna pitagórica entera.

Una identidad que lo explica todo

La fórmula para generar ternas pitagóricas se basa en una identidad algebraica muy elegante y que se le ocurrió a Euclides y a los Babilonios:

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$$

¿Qué significa esto?

- Si tomamos:

$$c = m^2 + n^2, \quad a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn$$

- Entonces se cumple automáticamente:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

- ¡Y eso es justamente el Teorema de Pitágoras!

Esta identidad es la base algebraica de muchas ternas pitagóricas.

Ejemplos:

① Para $m = 2$, $n = 1$ obtenemos:

- $a = m^2 - n^2 = 4 - 1 = 3$
- $b = 2mn = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$
- $c = m^2 + n^2 = 4 + 1 = 5$.
- Tenemos terna $(3, 4, 5)$

② Para $m = 3$, $n = 2$ obtenemos:

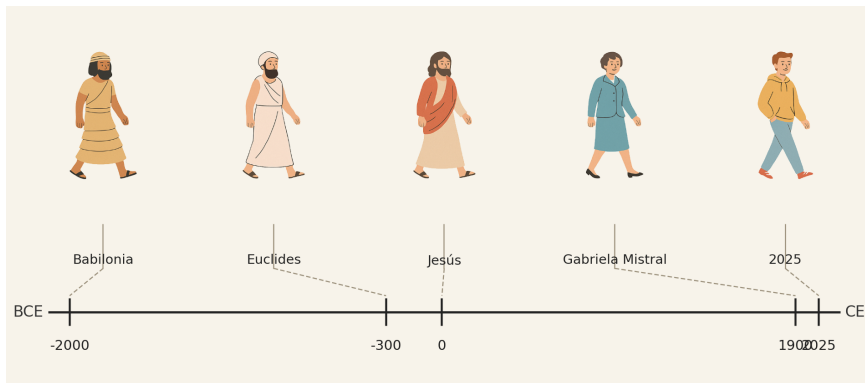
- $a = m^2 - n^2 = 9 - 4 = 5$
- $b = 2mn = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$
- $c = m^2 + n^2 = 9 + 4 = 13$.
- Tenemos la terna $(5, 12, 13)$

Ubicando hechos históricos en la recta numérica

Ya que estamoá acá hablando de Babilonios y Euclides, podemos ubicar eventos importantes de la historia en la recta, considerando el nacimiento de Jesús como año cero.

- A: Cultura Babilónica (1800 a.C.)
- B: Euclides (300 a.C.)
- C: Jesús (año 0) (Ojo:en calendario año 1)
- D: Gabriela Mistral (nacida en Vicuña) (1889 d.C.)
- E: Nosotros (2025 d.C.)

Línea de tiempo: historia y geometría



Demostración de la fórmula:

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$$

Fórmula a demostrar

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$$

Desarrollo del lado izquierdo (L.I.)

$$\begin{aligned}(m^2 + n^2)^2 &= (m^2)^2 + 2 \cdot m^2 \cdot n^2 + (n^2)^2 \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4\end{aligned}$$

Desarrollo del lado derecho (L.D.)

$$\begin{aligned}(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 &= (m^4 - 2m^2n^2 + n^4) + 4m^2n^2 \\ &= m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4\end{aligned}$$

Comparación

$$\text{L.I.} = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = \text{L.D.}$$

Conclusión

La fórmula es correcta:

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$$

Generación de todas las ternas pitagóricas

La fórmula:

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$$

Generación de todas las ternas pitagóricas

La fórmula:

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$$

Terna pitagórica generada

Para cualesquiera enteros $m > n > 0$:

$$(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$$

donde $a^2 + b^2 = c^2$.

Generación de todas las ternas pitagóricas

La fórmula:

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$$

Terna pitagórica generada

Para cualesquiera enteros $m > n > 0$:

$$(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$$

donde $a^2 + b^2 = c^2$.

Ejemplo con $m = 2$, $n = 1$

$$(2^2 - 1^2, 2 \cdot 2 \cdot 1, 2^2 + 1^2) = (3, 4, 5)$$

Teorema de Pitágoras

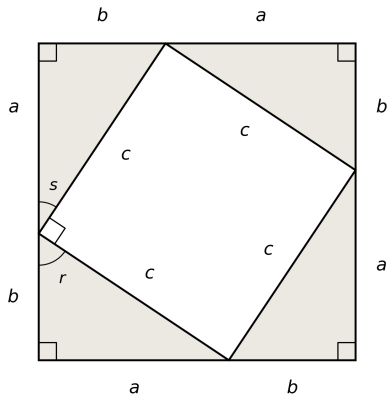
En todo triángulo rectángulo con catetos a y b , e hipotenusa c , se cumple:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Queremos demostrar este resultado usando áreas y una figura geométrica.

Demostración del Teorema de Pitágoras

Construimos un cuadrado de lado $a + b$ colocando en su interior cuatro triángulos rectángulos congruentes (misma forma y tamaño: son iguales iguales pero podrian estar girados). Las hipotenusas forman un cuadrado rotado en el centro.



Herramientas geométricas necesarias

Concepto / Herramienta	Definición o uso en la demostración
Triángulo rectángulo	Figura con un ángulo recto (90°) y dos catetos a , b , e hipotenusa c .
Hipotenusa	Lado opuesto al ángulo recto en un triángulo rectángulo; se denota c .
Área de un triángulo	Fórmula: $\frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2}ab$.
Área de un cuadrado	Si el lado mide x , entonces el área es x^2 .
Congruencia de triángulos (LAL)	Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo comprendido iguales. Se aplica para asegurar que los 4 triángulos del dibujo son idénticos.
Suma de ángulos de un triángulo	Siempre suman 180° . En un triángulo rectángulo: un ángulo recto + dos agudos complementarios.
Complementariedad de ángulos	Los ángulos agudos r y s de un triángulo rectángulo satisfacen $r + s = 90^\circ$.
Cuadrado rotado	Figura de cuatro lados iguales y ángulos rectos, rotado dentro del cuadrado externo.
Construcción geométrica	Uso de triángulos idénticos para construir una figura mayor o derivar relaciones entre áreas.
Argumento visual	Demostración basada en la observación de áreas y simetrías geométricas.

Paso 1: Construimos un cuadrado grande

Tomamos un cuadrado de lado $a + b$. En su interior dibujamos 4 triángulos rectángulos iguales con catetos a y b , y hipotenusa c .

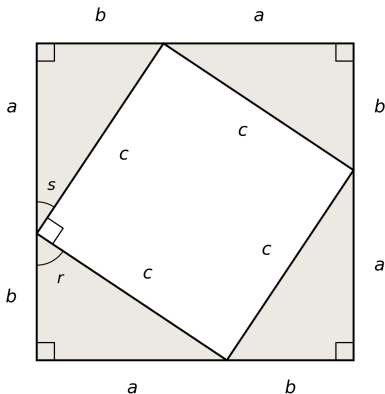


Figure: Demostración visual del Teorema de Pitágoras

Paso 1: Construimos un cuadrado grande

Tomamos un cuadrado de lado $a + b$. En su interior dibujamos 4 triángulos rectángulos iguales con catetos a y b , y hipotenusa c .

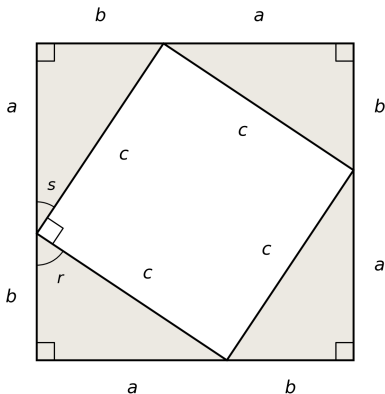


Figure: Demostración visual del Teorema de Pitágoras

Paso 2: El cuadrado interior

Las 4 hipotenusas (c) forman un cuadrilátero en el centro.

- Cada ángulo agudo del triángulo se repite.
- Como los ángulos de un triángulo suman 180° , los 3 ángulos alrededor de un vértice suman 90° .

Por eso, el cuadrilátero central es también un cuadrado de lado c .

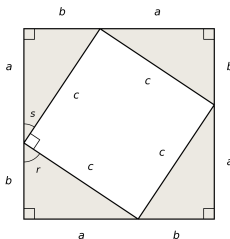


Figure: Demostración visual del Teorema de Pitágoras

Paso 3: Área total del cuadrado grande

El área total del cuadrado grande es:

$$(a + b)^2$$

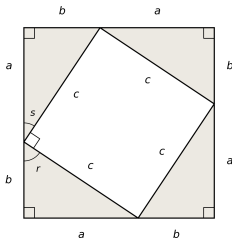


Figure: Demostración visual del Teorema de Pitágoras

Paso 3: Área total del cuadrado grande

El área total del cuadrado grande es:

$$(a + b)^2$$

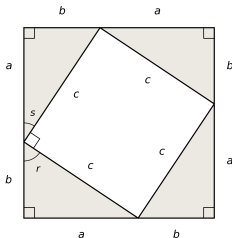


Figure: Demostración visual del Teorema de Pitágoras

Pero también es igual a:

- El área del cuadrado pequeño: c^2 , mas el área de los 4 triángulos:
 $4 \cdot \frac{1}{2}ab = 2ab$

Paso 3: Área total del cuadrado grande

El área total del cuadrado grande es:

$$(a + b)^2$$

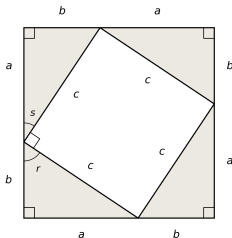


Figure: Demostración visual del Teorema de Pitágoras

Pero también es igual a:

- El área del cuadrado pequeño: c^2 , mas el área de los 4 triángulos:
 $4 \cdot \frac{1}{2}ab = 2ab$

Paso final: Despejando

Sabemos (por cuadrado de binomio) que,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Paso final: Despejando

Sabemos (por cuadrado de binomio) que,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Además, de la figura deducimos que

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \frac{a \cdot b}{2}.$$

Paso final: Despejando

Sabemos (por cuadrado de binomio) que,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Además, de la figura deducimos que

$$(a + b)^2 = c^2 + 4\frac{a \cdot b}{2}.$$

Luego,

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 4\frac{a \cdot b}{2}.$$

Entonces,

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab.$$

Paso final: Despejando

Sabemos (por cuadrado de binomio) que,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Además, de la figura deducimos que

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \frac{a \cdot b}{2}.$$

Luego,

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 4 \frac{a \cdot b}{2}.$$

Entonces,

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab.$$

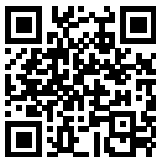
Restamos $2ab$ a ambos lados:

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

¿Qué es un par ordenado?

- Un **par ordenado** es una pareja de números (x, y) que representa un punto en el plano.
- El primer número es la posición horizontal (eje x), el segundo es la posición vertical (eje y).

Practica con pares ordenados



<https://www.geogebra.org/m/vdkqf9mt>

- Ingresa un par ordenado (x, y) y ubica el punto en el plano.
- Verifica tu respuesta y mejora con la retroalimentación.
- Práctica directa en los cuatro cuadrantes, sin distractores.

Suma y resta de puntos (vectores)

- Dados dos puntos o vectores: $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$,

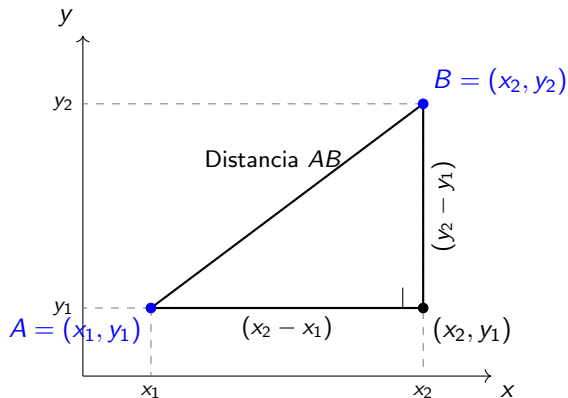
$$A + B = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$A - B = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

- Ejemplo: $(3, 1) + (2, 4) = (5, 5)$

Distancia entre dos puntos

Dado $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, conectarlos forma un triángulo rectángulo.



- La base mide $(x_2 - x_1)$
- La altura mide $(y_2 - y_1)$

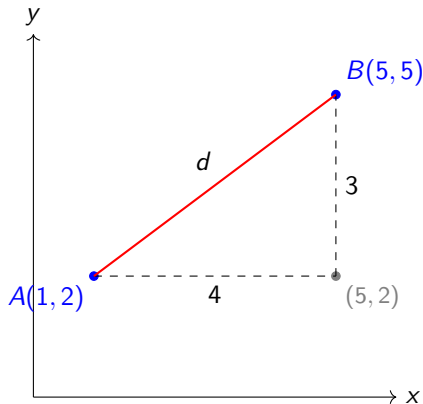
- La base mide $(x_2 - x_1)$
- La altura mide $(y_2 - y_1)$

Aplicando Pitágoras:

$$\text{Distancia } AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Visualización: distancia entre dos puntos

Dados los puntos $A = (1, 2)$ y $B = (5, 5)$, conectarlos forma un triángulo rectángulo.

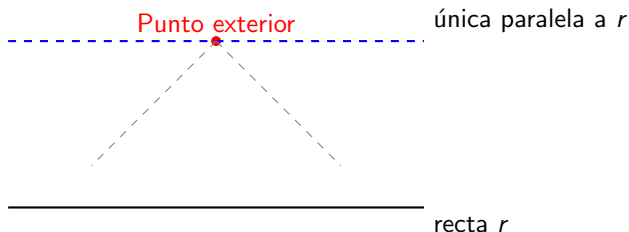


Distancia: $d = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

El quinto postulado de Euclides

Postulado de las paralelas

Por un punto exterior a una recta, solo se puede trazar una recta paralela a ella.



Importancia: Este postulado distingue la geometría euclidiana. En geometrías no euclidianas, como la hiperbólica o la esférica, este postulado no se cumple.

¿Qué es una recta en la geometría esférica?

En la geometría sobre la esfera, las “rectas” no son líneas infinitas como en el plano, sino que corresponden a:

Círculos máximos

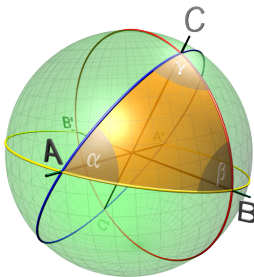
- Son los círculos más grandes que se pueden trazar sobre una esfera.
- Tienen el mismo centro y radio que la esfera.
- Ejemplo típico: la línea del ecuador o cualquier meridiano.

¿Qué es una recta en la esfera?

En la geometría esférica, las “rectas” no son líneas rectas como en el plano, sino **arcos de círculos máximos**, es decir, los más grandes posibles sobre una esfera.

- Ejemplos: El ecuador y cualquier meridiano.
- Dos “rectas” siempre se intersectan en dos puntos opuestos (antípodas).

Importante: Estas “rectas” son las trayectorias más cortas entre dos puntos sobre una esfera (geodésicas).



Triángulos en la geometría esférica

En la geometría esférica, los triángulos se forman con **arcos de círculos máximos** (como los meridianos o el ecuador).

- La suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico es **mayor a 180°** .
- No existen triángulos semejantes (sin ser congruentes).

Qué es un triángulo esférico?

En geometría esférica, los triángulos se construyen sobre la superficie de una esfera, y sus lados son arcos de círculos máximos (como los meridianos o el ecuador terrestre).

- La suma de sus ángulos internos es siempre mayor a 180° .

